Weierstrassの多項式近似定理

Theorem. (Weierstrassの多項式近似定理) $f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数とする. このとき $[a,b]$ 上で $f(x)$ に一様収束する多項式の列 $\{P_n(x)\}$ が存在する.

Proof. $f(x)$ を $[a,b]$ 上の連続関数とする. このとき, 必要ならば $\dfrac{x-a}{b-a}$ を改めて x と変換することで, $f(x)$ は最初から $[0,1]$ 上の連続関数してよい.

また, $[0,1]$ 上の多項式列 $\{P_n(x)\}$ を

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \ (n \geq 1)$$

で定義する. そして, この $P_n(x)$ が $f(x)$ に一様収束することを示す.

ここで $f(x)$ は $[0,1]$ 上連続であるから, $f(x)$ は $[0,1]$ 上一様連続である. よって

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ s.t. } \left|x - \frac{k}{n}\right| < \delta \Longrightarrow \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \varepsilon \ (\forall x \in [0,1], 0 \leq \forall k \leq n)$$

が成り立つ. また, 二項定理より

$$\sum_{k=0}^{n} f(x)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = f(x), \sum_{k=0}^{n}(nx-k)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx(1-x) \ (x \in [0,1])$$

であるから, $f(x)$ の $[0,1]$ 上の最大値を M とすると

$$\begin{aligned}
|f(x) - P_n(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k:\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{k:\left|x-\frac{k}{n}\right|\geq\delta}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&< \varepsilon\sum_{k:\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + 2M\sum_{k:\left|x-\frac{k}{n}\right|\geq\delta}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&< \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2n^2}\sum_{k:\left|x-\frac{k}{n}\right|\geq\delta}(nx-k)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \quad \left(\frac{|nx-k|}{\delta n} \geq 1 \text{ より}\right) \\
&< \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2n^2}\sum_{k=0}^{n}(nx-k)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2n}x(1-x) \\
&\leq \varepsilon + \frac{M}{2\delta^2n}
\end{aligned}$$

となる. よって n を十分大きくとれば $|f(x) - P_n(x)| < 2\varepsilon$ となるから, $\{P_n(x)\}$ は $f(x)$ に一様収束する多項式列であることがわかる. ■